Beispiel

Schwache aber nicht stark konvergente Folge, auch nicht schwach konvergente Folge

DGL II B

Definition

gleichmäßig konvex

DGL II B

Definition

Steitigkeitbegriffe

DGL II B

Definition

Monotoniebegriffe

DGL II B

Browder-Minty

Seien V ein reeller reflexiver separabler Banach-Raum und $A : V \to V^*$ monoton, radialstetig und koerzitiv. Dann ist A surjektiv. Die Lösungsmenge ist konvex und abgeschlossen. Ist A strikt monoton, so ist A bijektiv.

DGL II B

Lemma

Zusammenhang der Stetigkeitsbegriffe I:

- verstärkte Stetigkeit impliziert Kompaktheit (reflex).
- Kompaktheit impliziert Stetigkeit.
- Stetigkeit impliziert Demistetigkeit.
- Demistetigkeit impliziert Hemistetigkeit (reflex).
- Hemistetigkeit impliziert Radialstetigkeit.

DGL II B

Lemma

Seien die Voraussetzungen des Satzes von Browder-Minty erfüllt. Dann gilt

1. Ist A sogar stark monoton, so ist A^{-1} Lipschitz-stetig.
2. Ist A sogar stark monoton und Lipschitz-stetig, so ist A^{-1} stark monoton.

DGL II B

Lemma

Seien die Voraussetzungen des Satzes von Browder-Minty erfüllt. Dann gilt: Ist A sogar strikt monoton, so ist A^{-1} strikt monoton, beschränkt und demistetig.

DGL II B

Lemma

Korollar zum Fixpunktsatz von Brouwer

DGL II B

Definition

Pseudomonotonie

DGL II B

Ein Banach-Raum X heißt *gleichmäßig konvex* wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \|x-y\| \geqslant \varepsilon \implies \frac{\|x+y\|}{2} \leqslant 1-\delta \; \forall \|x\|, \|y\| \leqslant 1.$$

Gleichmäßige Konvexität sagt aus, dass zwei Vektoren der Einheitskugel einander nahe sein müssen, wenn deren Mittelpunkt nahe am Rand liegt.
Alle L^p-Räume, die Sobolev-Räume $\mathcal{W}^{m,p}$ für $p \in (1,\infty)$ und alle Innenprodukt-Räume (Parallelogramgleichung) sind gleichmäßig konvex. Gleichmäßig konvexe Räume sind reflexiv (Satz von Milman-Pettis).

$\left(u_n := \frac{\mathbb{1}_{(n,2n)}}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ konvergiert nicht stark, da es keine Cauchy-Folge ist, betrachte $m \in 2\mathbb{N}, n := \frac{3m}{2}$, aber schwach gegen 0.
$\left(u_n(x) := 2n(1-nx)\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(0,1)$ konvergiert nicht mal schwach, da $\langle u_n, \mathbb{1} \rangle = 1$ aber $\langle \varphi, u_n \rangle \to 0$ für $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$

- *monoton*: $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geqslant 0 \; \forall v, w \in V$.
- *strikt monoton*: $\langle Av - Aw, v - w \rangle > 0 \; \forall v \neq w \in V$.
- *stark monoton*: $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geqslant \mu |v-w|^2$, $\mu > 0$.
- *gleichmäßig monoton*: $\rho : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ strikt monoton wachsend, $\rho(0) = 0$: $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geqslant \rho(|v-w|)$.
- *d-monoton*: $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ strikt monoton wachsend: $\langle Av - Aw, v - w \rangle \geqslant (\alpha(|v|) - \alpha(|w|))(|v| - |w|) \; \forall v, w \in V$.
- *koerzitiv*: $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $\gamma(z) \xrightarrow{z\to\infty} \infty$: $\langle Av, v \rangle \geqslant \gamma(|v|)|v|$.

- *demistetig*: $v_n \to v$ in $V \implies Av_n \rightharpoonup Av$ in V^*.
- *hemistetig*: $[0,1] \ni t \mapsto \langle A(u+tv), w \rangle$ stetig $\forall u, v, w$.
- *radialstetig*: $[0,1] \ni t \mapsto \langle A(u+tv), v \rangle$ stetig $\forall u, v \in V$.
- *verstärkt stetig*: $u_n \rightharpoonup u$ in $V \implies Au_n \to Au$ in V^*.
- *schwach-schwach-stetig*: $v_n \rightharpoonup v \implies Av_n \rightharpoonup Av$.
- *lokal beschränkt*: um jeden Punkt $v \in V$ gibt es eine Umgebung, auf der A beschränkt ist.

Die Identität $\ell_1 \to \ell_\infty$ ist verstärkt stetig (ℓ_1 hat die Schur-Eigenschaft) aber nicht kompakt, da das Bild der ℓ_1-Einheitskugel die Einheitsvektoren enthält, welche keine konvergente Teilfolge besitzen.
1. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ beschränkt. Dann existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n'})_{n'\in\mathbb{N}} \rightharpoonup u \in V$. Aufgrund der verstärkten Stetigkeit folgt $Au_{n'} \to Au$.
4. Seien $u, v, w \in V$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ konvergent gegen $t \in [0,1]$. Dann folgt $u + t_n v \to u + tv$ und $A(u+t_n v) \rightharpoonup A(u+tv)$ in V^*, da V reflexiv ist, also $A(u+t_n v) \xrightharpoonup{*} A(u+tv)$ in V^*, und daher insbesondere $\langle A(u+t_n v), w \rangle \to \langle A(u+tv), w \rangle$.
2, 3, 5 sind klar.

Seien $u_1, u_2 \in V$ Lösungen $\theta \in [0,1]$ und $u_\theta := \theta u_1 + (1-\theta)u_2$.

$$\langle f - Av, u_\theta - v \rangle = \theta \langle Au_1 - Av, u_1 - v \rangle + (1-\theta)\langle Au_2 - Av, u_2 - v \rangle \geqslant 0,$$

Für $v := u_\theta \pm \lambda w$, $\lambda \in (0,1]$ gilt $\mp\cancel{\lambda}\langle f - A(u_\theta \pm \lambda w), w \rangle \geqslant 0$ und somit $\langle f - Au_\theta, w \rangle = 0$ für $\lambda \to 0$. (Minty's Trick)
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge von Lösungen $\rightharpoonup u \in V$.

$$\langle f - Av, u - v \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f - Av, u_n - v \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geqslant 0,$$

Minty. Satz von Mazur. Angenommen, $u_1 \neq u_2$ sind zwei Lösungen von $Au = f$. Dann $0 < \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f - f, u_1 - u_2 \rangle = 0$.

$\langle A^{-1}f - A^{-1}g, f - g \rangle = \langle Au - Av, u - v \rangle > 0$.
Sei $F \subset V^*$ beschränkt. $\gamma(\|u\|)\|u\| \leqslant \langle Au, u \rangle = \langle f, u \rangle \leqslant \|f\|_* \|u\| \leqslant M\|u\|$. Nun folgt $\gamma(\|u\|) = \gamma(\|A^{-1}f\|) \leqslant M$. Wäre $A^{-1}F$ nicht beschr, $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F : \|A^{-1}f_n\| \to \infty$, aber dann $\gamma(\|A^{-1}f - n\|) \to \infty)$.
Sei $(f_n = Au_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ konvergent gegen f in V^*. $(u_n = A^{-1}f)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ ist beschränkt (A^{-1} monoton, d.h. lok. beschr.). $\exists u_{n'} \subset V$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u \in V$. $\langle f - Av, u - v \rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle f - Av, u_{n'} - v \rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v \rangle \geqslant 0$.
Minty's Trick: $Au_n = f$ und somit $u_{n'} = A^{-1}f_n \rightharpoonup A^{-1}f = u$.

$$\|A^{-1}x - A^{-1}y\| = \|u - v\| \leqslant \frac{\langle Au - Av, u - v \rangle}{\mu \|u - v\|} \overset{\text{CS}}{\leqslant} \frac{1}{\mu}\|Au - Av\|$$

$$\langle A^{-1}x - A^{-1}y, x - y \rangle = \langle Au - Av, u - v \rangle \overset{(\star)}{\geqslant} \mu \|u - v\|^2$$
$$\overset{(\ddagger)}{\geqslant} \frac{\mu}{L}\|AA^{-1}x - AA^{-1}y\|^2 = \frac{\mu}{L}\|x - y\|^2,$$

Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt *pseudomonoton*, wenn aus $u_n \rightharpoonup u$ in V und $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leqslant 0$ folgt, dass $\langle Au, u - w \rangle \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle$ für alle $w \in V$ gilt.

Sei $h : \mathbb{R}^m \supset \overline{B}(0,R) \to \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle $h(z) \bullet z \geqslant 0$ auf $\partial B(0,R)$, d.h. für alle $\|z\| = R$. Dann besitzt h eine Nullstelle.
Die Abbildung $g \colon \overline{B}(0,R) \to \partial\overline{B}(0,R)$, $z \mapsto -R\frac{h(z)}{\|h(z)\|}$ hat einen Fixpunkt: es existiert ein $z^* \in \overline{B}(0,R)$ mit $g(z^*) = z^*$. Dann gilt $\|z^*\| = R$ und

$$0 \leqslant h(z^*) \bullet z^* = h(z^*)g(z^*) = -R\frac{h(z^*)^2}{\|h(z^*)\|} < 0,$$

was ein Widerspruch ist.

Äquivalente Charakterisierung

Pseudomonotonie

DGL II B

Definition

Potentialoperator, Potential

DGL II B

Explizite Darstellung des Potenzials

Sei $A : V \to V^*$ ein radialstetiger Potenzialoperator mit Potenzial $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\Phi(v) = \Phi(0) + \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \mathrm{d}t.$$

DGL II B

$A : V \to V^*$ demistetig. TFAE: (I) A ist Potenzialoperator

(II) Für alle $x, y \in V$ und alle Wege von y nach x, d.h. alle $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], V)$ mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma(1) = x$ gilt

$$\int_0^1 \langle A(tx), x \rangle - \langle A(ty), y \rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 \langle A\gamma(t), \gamma'(t) \rangle \mathrm{d}t.$$

(III) $\int_0^1 \langle A(tx), x \rangle - \langle A(ty), y \rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 \langle A(y+t(x-y)), x-y \rangle \mathrm{d}t.$

DGL II B

Existenz von Minimierern auf Kugeln I

Seien $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ SFUS, V reflexiv, $K \subset V$ nichtleer, **abgeschlossen**, **beschränkt** und konvex. Dann existiert $v^* \in K$ mit $\Phi(v^*) = \min_{v \in K} \Phi(v)$. Die Menge der Minimierer ist schwach abgeschlossen.

DGL II B

Existenz von Minimierern auf Kugeln II

Sei $\Phi : V \to \mathbb{R}$ SFUS, schwach koerzitives Funktional, $K \subset V$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann existiert ein Minimierer von Φ in K.

DGL II B

Φ konvex $\iff$ Φ' monoton

Sei A ein Potenzialoperator mit Potenzial Φ. TFAE:

1. Das Funktional Φ ist konvex.
2. Es gilt $\langle Av, v - w \rangle \geqslant \Phi(v) - \Phi(w)$ für alle $v, w \in V$.
3. Der Operator A ist monoton.
4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \Phi(v + tw)$ konvex („entlang Schnitte").

DGL II B

Φ konvex $\iff$ Φ' monoton

Zweiter Teil des Beweises (3) $\implies$ (4), (1) $\implies$ (4)

DGL II B

Potential eines monotonen Operators ist SFUS

Jedes konvexe Gâteaux-differenzierbare $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ ist SFUS.

DGL II B

Minimierer sind Lösung der DGL

Seien $A : V \to V^*$ ein Potentialoperator mit Potential $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ und $f \in V^*$. Aus $\Phi(u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in V} \Phi(v) - \langle f, v \rangle$ folgt $Au = f$ in V^*.
Ist A monoton, gilt auch die Umkehrung.

DGL II B

Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt *Potenzialoperator*, wenn eine GÂTEAUX-differenzierbares *Potential* $\Phi \colon V \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$D\Phi(u;v) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(u+hv) - \Phi(u)}{h} = \langle Au, v \rangle$$

für alle $u, v \in V$ gilt.

Seien $A : V \to V^*$ beschränkt sowie V reell, reflexiv und separabel. Dann ist A genau dann pseudomonoton, wenn aus $u_n \rightharpoonup u$ in V und $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leqslant 0$ folgt, dass $Au_n \rightharpoonup Au$ und $\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle Au, u \rangle$ gilt.

(I) $\implies$ (II): Sei $\Phi \colon V \to \mathbb{R}$ ein Potenzial von A.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \langle A(tv), v \rangle - \langle A(tw), w \rangle \,\mathrm{d}t &= \Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) \\ &= \int_0^1 (\Phi \circ u)(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(K)}}{=} \int_0^1 \Phi'(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(III) $\implies$ (I): $\Phi(v) := \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \mathrm{d}t$ definiert Potenzial von A:

$$\frac{\Phi(v+hw) - \Phi(v)}{h} = \int_0^1 \langle A(t(v+hw)), v + hw \rangle - \langle A(tv), v \rangle \,\mathrm{d}t =: (\star)$$

Mit $x := v + hw$ und $y := v$ folgt nach Voraussetzung

$$\lim_{h\to 0} (\star) \overset{\text{(L)}}{=} \int_0^1 \lim_{h\to 0} \frac{\langle A(v + thw), \cancel{h}w \rangle}{\cancel{h}} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle Av, w \rangle \mathrm{d}t = \langle Av, w \rangle.$$

Für $v \in V$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(tv) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(tv + hv) - \Phi(tv)}{h} = \langle \Phi'(tv), v \rangle = \langle A(tv), v \rangle.$$

Da $t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(tv)$ aufgrund der Radialstetigkeit von A stetig ist, folgt mit dem Hauptsatz durch Integration über $[0,1]$

$$\Phi(v) - \Phi(0) = \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \mathrm{d}t.$$

Sei $w \in K$. Aufgrund der schwachen Koerzivität von Φ existiert ein $R > 0$, sodass für alle $z \in V$ mit $\|z\| > R$ die Ungleichung $\Phi(z) \geqslant \Phi(w)$ gilt. Wähle nun R gegebenenfalls noch größer, sodass $w \in K_R := K \cap \overline{B}_R(0)$ gilt. Die Menge K_R ist nichtleer, abgeschlossen, konvex und beschränkt. Nach einem Lemma existiert ein $v^* \in K_R \subset K$ mit $\Phi(v^*) = \min_{v\in K_R} \Phi(v) \leqslant \Phi(w) \leqslant \Phi(z)$ für alle $z \in K \backslash K_R$. Also gilt $\Phi(v^*) \leqslant \inf_{z\in K\backslash K_R} \Phi(z)$ und $v^* \in K$.

Anwendung (*K-Bestapproximation*): $K =$ Unterraum, $\Phi := \|\cdot - v\|$.

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge mit $\Phi(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{v\in K} \Phi(v) =: d$. Da K beschränkt ist, ist es $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch. Aufgrund der Reflexivität von V existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u'_n)_{n'\in\mathbb{N}}$ mit $u'_n \to u \in V$. Nach dem Satz von MAZUR ist K sogar schwach abgeschlossen, also gilt $u \in K$. Es gilt $d \leqslant \Phi(u) \leqslant \liminf_{n'\to\infty} \Phi(u_{n'}) = d$ und somit $\Phi(u) = d \in \mathbb{R}$.

$\Phi(v) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \Phi(v_n) = \min_{w\in K} \Phi(w) \leqslant \Phi(v)$

(3) $\implies$ (4): Mit der Kettenregel folgt $\varphi'(t) = \langle \Phi'(v + tw), w \rangle$. Für $t > s$ gilt (Ableitung monoton $\implies$ konvex)

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(s) &= \langle A(v + tw) - A(v + sw), w \rangle \\ &= \frac{1}{t-s}\big\langle A(v+tw) - A(v+sw), (v+tw) - (v+sw)\big\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

(4) $\implies$ (1): Seien $v, w \in V$, $\theta \in [0,1]$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \Phi(v + t(w - v))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi((1-\theta)v + \theta w) &= \Phi(v + \theta(w-v)) = \varphi(\theta) = \varphi((1-\theta)\cdot 0 + \theta \cdot 1) \\ &\leqslant (1-\theta)\varphi(0) + \theta\varphi(1) = (1-\theta)\Phi(v) + \theta\Phi(w).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\langle Av, w - v \rangle &= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\Phi(v + h(w-v)) - \Phi(v)\right) \\ &\overset{(1)}{\geqslant} -\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\left((1-h)\Phi(v) + h\Phi(w) - \Phi(v)\right) \\ &= -\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\Phi(w) - \Phi(v) = \Phi(v) - \Phi(w).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle Av - Aw, v - w \rangle &= \langle Av, v - w \rangle + \langle Aw, w - v \rangle \\ &\overset{(2)}{\geqslant} \Phi(v) - \Phi(w) + \Phi(w) - \Phi(v) = 0.\end{aligned}$$

(1): Für $w \in V$ gilt $\frac{1}{h}(\Phi_f(u + hw) - \Phi_f(u)) \overset{(\leqslant)}{\geqslant} 0$ für $h \overset{(<)}{>} 0$ und somit

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\Phi(u + hw) - \langle f, u + hw \rangle - (\Phi(u) - \langle f, u \rangle)\right) \\ &\overset{\text{(L)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(u+hw) - \Phi(u)}{h} - \langle f, w \rangle = \langle Au - f, w \rangle.\end{aligned}$$

(2): Ist A monoton und $Au = f$, so folgt nach einem Lemma

$$\begin{aligned}&\langle f, u - v \rangle = \langle Au, u - v \rangle \geqslant \Phi(u) - \Phi(v) \quad \forall v \in V, \\ &\implies \Phi(u) - \langle f, u \rangle \leqslant \Phi(v) - \langle f, v \rangle.\end{aligned}$$

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit Grenzwert $u \in V$. Nach dem vorherigen Lemma (Variationsungleichung) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi(u) - \Phi(u_n) \leqslant \langle \Phi'(u), u - u_n \rangle$$

und somit

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) + \langle \Phi'(u), u - u_n \rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) + \lim_{n\to\infty} \langle \Phi'(u), u - u_n \rangle = \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n).\end{aligned}$$

Motivation

Young-Maße

DGL II B

Lemma

Schwache Konvergenz und Mittelwerte

DGL II B

Beispiel

Konzentration der Masse (in 0) vs Oszillation

DGL II B

Beispiel

Young-Maß bei periodischer Oszillation

DGL II B

Definition

Radon- und Wahrscheinlichkeitsmaß

DGL II B

Definition & Satz

C_0 und Riesz-Markov-Kakutani

DGL II B

Definition & Satz

$L^\infty_{w*}(\Omega; M(\mathbb{R}))$, schwach*-messbar

DGL II B

Definition

Young-Maß

DGL II B

Satz

Hauptsatz über Young-Maße

DGL II B

lemma

Für den Erwartungswert eines Young-Maßes gilt $u(x) = \mathbb{E}[\nu_x]$

DGL II B

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Dann gilt $u_n \rightharpoonup u$ genau dann wenn die Mittelwerte stark konvergieren, d.h.

$$\frac{1}{|D|}\int_D u_n \,\mathrm{d}x \to \frac{1}{|D|}\int_D u \,\mathrm{d}x$$

für alle messbaren $D \subset \Omega$ gilt.
„$\implies$“: Teste mit $v := \mathbb{1}_D$.
„$\impliedby$“: Es gilt $\langle u_n - u, v \rangle \to 0$ für alle $v \in \operatorname{span}(\{\mathbb{1}_D : D \subset \Omega \text{ messbar}\})$, welcher dicht liegt.

Selbst in einem HILBERT-Raum gilt für eine schwach konvergente Folge $u_n \rightharpoonup u$ und eine nichtlineare Funktion f – auch wenn $f(u_n) \to v$ stark konvergiert – nicht $v = f(u)$. Betrachte als Beispiel eine Orthonormalbasis u_n mit $u_n \rightharpoonup 0$ und $f := \|\cdot\|$. Dann gilt $f(u_n) = 1 \neq 0 = f(0)$.
Wir wollen also schwache Grenzwerte in einem gewissen Sinne verallgemeinern, um mehr über den Grenzwert b herauszufinden.

Haben $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup b$, wir wollen Grenzwert identifizieren.

Für $u(x) := h(x) - 2h(2x-1)$, wobei h die HEAVISIDE funktion ist, definiere $u_n(x) := u(nx)$, wobei u 1-periodisch fortgesetzt wird.
Wir wollen die Wahrscheinlichkeit messen, mit der ein Funktionswert „im Grenzwert“ angenommen wird. In diesem Fall ist das zugehörige YOUNG-Maß, welches ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dass diese Wahrscheinlichkeit modelliert, gegeben durch

$$\nu := \frac{\delta_{\{1\}} + \delta_{\{-1\}}}{2},$$

wobei δ die DIRAC-Funktion ist.

Für $u_n := n^{1/p}\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} \subset L^p(\Omega)$ gilt $\|u_n\|_{0,p} = 1$, $u_n \rightharpoonup 0$ und sogar $u_n \to 0$ fast überall, aber nicht $u_n \to 0$. ($\nu_x = \delta_{\{0\}}$ f.ü.)
Die Folge $u_n(x) := \sin(2\pi n x)$ ist beschränkt, sogar gleichmäßig: es gilt $\|u_n\|_{0,\infty} = 1$. (Die gleichmäßige Beschränktheit impliziert, dass es keinen Konzentrationseffekt geben kann.) Es gilt $u_n \rightharpoonup 0$ jedoch nicht $u_n \to 0$.
Hier hat ν die Dichte $\frac{\arcsin(y)}{\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ auf $[-1,1]$, da wir "von der y-Achse auf die Funktion schauen". Also gilt für alle messbaren $A \subset [-1,1]$ $\nu(A) = \frac{1}{\pi}\int\limits_A \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Wir betrachten $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : u(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0\}$ mit der Supremumsnorm.
Dann gilt $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \cong (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}))^*$ via $\langle \mu, f \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{R})\times\mathcal{C}_0(\mathbb{R})} := \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Sei $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ der Vektorraum (Für die Vektorraumstruktur (sonst können wir keine Norm definieren) benötigen wir eigentlich auch signierte Maß, da aber Wahrscheinlichkeitsmaße nichtnegativ sind, ignorieren wir dies.) der beschränkten RADON-Maße auf $\mathbb{R}$, wobei ein beschränktes Maß μ RADON-Maß heißt, wenn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$gilt $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\}$.
$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} := \int \mathrm{d}|\mu| = \sup_{(A_k)_{k=1}^N} \sum_{k=0}^N |\mu|(A)$, wobei die A_k eine paarweise disjunkte Ausschöpfung von $\mathbb{R}$ sind. Es gilt $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, wobei $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ die W-Maße auf $\mathbb{R}$ bezeichnet, und $\mu \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) \iff \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = 1$ und $\mu \geqslant 0$ gilt.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und beschränkt, $(u_n : \Omega \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Die Abbildung $\nu_{(\cdot)} \in L^\infty_{w*}(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ heißt *von der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugtes YOUNG-Maß*, wenn $\nu_x \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \Omega$ gilt und für jede CARATHEODORY-Funktion$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus

$$(f(\cdot, u_n))_n \rightharpoonup \overline{f} \quad \text{in } L^1(\Omega),$$

folgt, dass $\overline{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}\nu_x(t)$ fast überall gilt.

$$L^\infty_{w*}(\Omega; M(\mathbb{R})) := \{u : \Omega \to \mathcal{M}(\mathbb{R}) : u \in L^\infty \text{ ist schwach*-mb.}\},$$

wobei wir ν schwach*-messbar nennen, wenn die Abbildung

$$x \mapsto \int f \,\mathrm{d}\nu_x = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}\nu_x(y)$$

für alle $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ messbar ist.

Es gilt $(L^1(\Omega; \mathcal{C}_0(\mathbb{R})))^* \cong L^\infty_{w*}(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$.

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ für $p \in [1,\infty]$, sodass $u_n \rightharpoonup u$ für $p < \infty$ bzw $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ für $p = \infty$. Ist ν ein YOUNG-Maß einer Teilfolge von u_n so gilt $u(x) = \int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}\mu_x(t)$ fast überall in Ω.
Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g(|u_n(x)|)\,\mathrm{d}x < \infty$ (konvergent $\implies$ in L^p beschr.) existiert eine Teilfolge $u_{n'}$ und ein zugehöriges YOUNG-Maß. Ist ν nun ein beliebiges YOUNG-Maß, so wählen wir die CARATHEODORY-Funktion $f(x,t) := t$. Dann gilt **(TODO:** $p = \infty$**)** $f(\cdot, u_{n'}) = u_{n'} \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ und somit auch in $L^1(\Omega)$ (da Ω beschränkt ist). Nach dem Hauptsatz folgt $u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}\mu_x(t) = \int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}\mu_x(t) = \mathbb{E}[\nu_x]$.

Seien Ω und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben. Existiert eine stetige monoton wachsende Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ und (Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L^p beschränkt, wähle $g(t) := t^p$.)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g(|u_n(x)|)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

dann hat $(u_n)_n$ eine Teilfolge $u_{n'}$, welche ein YOUNG-Maß erzeugt.

Satz

Dunford-Pettis

DGL II B

Satz

De la Vallée Poussin

DGL II B

Satz

Sir Ball

DGL II B

Satz

Pedregal

DGL II B

Definition

Maßwertige Lösung

DGL II B

Lemma: Zusammenhang der Monotoniebegriffe I

1. Gleichmäßige Monotonie impliziert strikte Monotonie.
2. Starke Monotonie impliziert gleichmäßige Monotonie.
3. Starke Monotonie impliziert d-Monotonie.
4. Starke Monotonie impliziert Koerzivität.
5. d-Monotonie impliziert Monotonie.

DGL II B

Lemma: Zusammenhang der Monotoniebegriffe II

Monotonie impliziert lokale Beschränktheit.

DGL II B

Lemma: Zusammenhang der Monotoniebegriffe III

Auf reflexiven Räumen implizieren Monotonie und Radialstetigkeit Demistetigkeit.

DGL II B

Definition

Eigenschaft (M)

DGL II B

Definition

Gâteaux-Differenzierbarkeit

DGL II B

Eine beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ hat genau dann ein schwach konvergente Teilfolge wenn eine monoton wachsende Funktion $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ existiert mit

$$\frac{\psi(z)}{z} \xrightarrow{z\to\infty} \infty, \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \psi(|u_n|)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Eine beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ hat genau dann ein schwach konvergente Teilfolge, wenn u_n gleichgradig integrierbar sind, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$\int_A |u_n|\,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon \;\forall A \subset \Omega \text{ messbar},\; \lambda(A) < \delta \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists M > 0 : \int_{\{x:|u_n(x)|>M\}} |u_n|\,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ für $p \in [1,\infty)$. Dann gilt $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ genau dann wenn gilt:

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach in $L^1(\Omega)$.
2. Das von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugte Young-Maß hat die Form $\nu_x = \delta_{u(x)}$ für ein $u \in L^p(\Omega)$.

Es gilt fast überall

$$\nu_x(A) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \lim_{n\to\infty} \frac{|\{y \in B(x,\varepsilon) : u_n(y) \in A\}|}{|B(x,\varepsilon)|},$$

wobei $|\cdot|$ Volumen beschreibt.

1. und 2. sind klar.
3. Mit $(\triangle \neq)^{-1}$ sieht man $\alpha = \mu\,\mathrm{id}$.
4. Wähle $\gamma(x) = \mu x - \|A(0)\|_*$.
5. Folgt direkt aus der Monotonie von α.

Das Dupel $(u, \nu_{(\cdot)}) \in V \times \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{w}^*}(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ heißt maßwertige Lösung von

$$\begin{cases} -(a(x,u'(x)))' = 0 & \text{in } (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

wenn für alle $v \in \mathcal{W}^{1,p}_0(a,b)$ und fast alle $x \in (a,b)$

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}} a(x,t)\,\mathrm{d}\nu_x(t) v'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}\nu_x(t) = u'(x)$$

gilt. (*Ist $\nu_x = \delta_{u'(x)}$, so ist u eine schwache Lösung.*)

Sei $u_n \to u$. Wir zeigen $Au_n \rightharpoonup Au$ in V^*, d.h. $\langle Au_n - Au, v \rangle \to 0$ für alle $v \in V$, da wegen der *Reflexivität von V schwach- und schwach*-Konvergenz in V^* zusammenfallen*. Da A linear und kompakt ist, ist er stetig und somit demistetig und somit lokalbeschränkt. Deswegen ist $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ beschränkt, also existiert wegen der Kompaktheit von A Teilfolge u'_n und ein $b \in V^*$, sodass $Au_{n'} \rightharpoonup b$ in V^* gilt. Wir zeigen nun $b = Au$ mit Minty*'s trick*: für beliebige $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \langle b, u \rangle \leftarrow \langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle &\geqslant \langle Au_{n'}, u_{n'} \rangle - \langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v \rangle \\ &= \langle Av, u_{n'} - v \rangle + \langle Au_{n'}, v \rangle \to \langle Av, u - v \rangle + \langle b, v \rangle. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $\langle b, u-v \rangle \geqslant \langle Av, u-v \rangle \quad \forall v \in V$. Für $t > 0$ und $w \in V$ setze $v = u + tw$. Dann gilt $-t\langle b, w \rangle \geqslant -t\langle A(u+tw), w \rangle$, also $\langle b, w \rangle \leqslant \langle A(u+tw), w \rangle \xrightarrow[\text{radialst.}]{t\searrow 0} \langle Au, w \rangle$ Analog erhalten wir $\langle b, w \rangle \geqslant \langle Au, w \rangle$ für $t < 0$ und somit $\langle b, w \rangle = \langle Au, w \rangle$ für alle $w \in V$ und somit $b = Au$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$: $u_n \to u$ aber $\|Au_n\|_* \to \infty$. $\alpha_n := 1 + \|Au_n\|_*\|u_n - u\| \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v \rangle &\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\langle Au_n, v \rangle + \langle Au_n - A(u+v), u_n - (u+v) \rangle\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_n}\left(\langle Au_n, u_n - u \rangle - \langle A(u+v), u_n - (u+v) \rangle\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\|Au_n\|_*\|u_n - u\| + \|A(u+v)\|_*\|u_n - u - v\|\right) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|A(u+v)\|_*\|u_n - (u+v)\| \leqslant 1 + \frac{C}{\alpha_n}\|A(u+v)\|_*. \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v \rangle$ für alle $v \in V$ beschränkt. Nach Banach-Steinhaus $\exists M > 0 : \frac{1}{\alpha_n}\|Au_n\|_* \leqslant M$. Umstellen ergibt $\|Au_n\|_* \leqslant M(1 + \|Au_n\|_*\|u_n - u\|)$ Da $u_n \to u$ gilt, $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $\|u_n - u\| \leqslant \frac{1}{2M}$ für alle $n > N$ gilt. Dies ergibt jedoch $\|Au_n\|_* \leqslant M + \frac{1}{2}\|Au_n\|_*$, also $\|Au_n\|_* \leqslant 2M$ für alle $n > N$, was einen Widerspruch darstellt.

Seien X und Y normierte Räume und $F : X \to Y$ eine Abbildung. Existiert der Grenzwert

$$DF(x;y) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+hy) - F(x)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} F(x+hy)\big|_{h=0},$$

so heißt er Gâteaux-*Differential von F an der Stelle x in Richtung y*. Ist die Abbildung $y \mapsto DF(x;y)$ linear und beschränkt, so heißt F Gâteaux-differenzierbar in x. Die Abbildung $F'(x) \in L(X,Y)$ definiert durch $F'(x)y := DF(x;y)$ heißt Gâteaux-Ableitung von F in x.
Wir betrachten oft $Y = \mathbb{R}$ und somit $F'(x) \in X^*$, $F'(x)y = \langle F'(x), y \rangle$.

Gilt $u_n \rightharpoonup u$ in V sowie $Au_n \rightharpoonup b$ in V^* und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leqslant \langle b, u \rangle,$$

so folgt $Au = b$.
Pseudomonotone Operatoren besitzen die Eigenschaft (M).

Satz ohne Beweis

Banach-Steinhaus

DGL II B

Korollar

Jeder monotone Potenzialoperator ist demistetig

DGL II B

Lemma: Äq. Charakterisierung: Demistetigkeit

Ein monotoner Operator $A\colon V \to V^*$ ist genau dann demistetig, wenn aus $\langle f - Aw, u - w \rangle \geqslant 0$ für alle $w \in V$ auch $Au = f$ folgt.

DGL II B

Beweis

Browder-Minty für P-Operatoren I

DGL II B

Beweis

Browder-Minty für P-Operatoren II

DGL II B

Beispiel

Potenzial des p-Laplace

DGL II B

Beweis

Satz von Brezis: Browder-Minty für Pseudomonotone Operatoren I

DGL II B

Beweis

Browder-Minty für Pseudomonotone Operatoren II

DGL II B

Navier-Stokes-Gleichung

Model and function spaces

DGL II B

Navier-Stokes-Gleichung

Schwache Formulierung

DGL II B

Für $t > 0$, $v \in V$ und $\ddagger := t\langle f, u-v \rangle = \langle f, u-(u+t(v-u)) \rangle$

$$\begin{aligned}\ddagger &= \langle f, u-(u+t(v-u)) \rangle \\ &\geqslant \langle A(u+t(v-u)), u-(u+t(v-u)) \rangle \\ &= \langle A(u+t(v-u)), (u+t(v-u)) - (u+t(v-u)+v-u) \rangle t \\ &\geqslant [\Phi(u+t(v-u)) - \Phi(u+t(v-u)+v-u)] \cdot t,\end{aligned}$$

mit der Variationsungl. und äq. Charakterisierung. Kürzen. Φ „richtungsstetig" also $\langle f, u-v \rangle \geqslant \lim_{t>0} \Phi(u+t(v-u)) - \Phi(v+t(v-u)) = \Phi(u) - \Phi(v) \quad \forall v \in V$. Dann zwei Lemma.

auch: *Uniform Boundedness Principle.*
Seien X ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum und $F \subset L(X,Y)$.
$\sup_{T \in F} \|Tx\|_Y < \infty \; \forall x \in X \implies \sup_{T\in F} \|T\|_{L(X,Y)} < \infty$.

Jeder monotoner koerzitiver P-Operator $A\colon V \to V^*$ ist surjektiv.
A ist radialstetig und hat A das Potenzial $\Phi(v) := \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \mathrm{d}t$. Da A monoton ist, ist Φ konvex. Somit ist $\Phi_f(v) := \Phi(v) - \langle f, v \rangle$ SFUS, da Φ es bereits ist, und $\langle f, v \rangle$ sogar stetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass Φ_f schwach koerzitiv ist. Dann existiert nämlich ein Minimierer $u \in V$ mit $\Phi_f(u) = \min_{v\in V} \Phi_f(v)$ und es folgt $Au = f$.

" $\implies$ ": Minty's Trick, da Demi $\implies$ Radial.
" $\impliedby$ ": Sei $(u_n)_n \to u$. Monoton $\implies$ lok. beschr. Somit $(Au_n)_n$ beschr, d.h. $Au_{n'} \to f \in V^*$.

$$\langle f - Aw, u-w \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Aw, u_n - w \rangle \geqslant 0$$

und somit $Au = f$. TFP.

Betrachte $V := \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ für $p > 1$ und $A\colon V \to V^*$, $\langle Au, v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$. Für alle $u, v \in V$

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(u), v \rangle &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (\Phi(u+hv) - \Phi(u)) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{hp} \int_\Omega |\nabla(u+hv)|^p - |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{hp} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (|\nabla(u+shv)|^p) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x && \text{(FTOC)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}}{\cancel{hp}} \int_\Omega \int_0^1 \cancel{ph} |\nabla(u+shv)|^{p-2} \, \nabla(u+shv) \nabla v \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{(L)}}{\underset{\text{(F)}}{=}} \int_0^1 \int_\Omega |\nabla(u)|^{p-2} \, \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s = \langle Au, v \rangle.\end{aligned}$$

$(\star)$: $t \mapsto \langle A(tv), v \rangle$ ist monoton, weil A monoton. Für $v \in V$

$$\begin{aligned}\Phi_f(v) &= \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle \mathrm{d}t - \langle f, v \rangle \\ &= \int_0^1 \langle A(tv) - A(0), tv - 0 \rangle \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t - \langle f - A(0), v - 0 \rangle \\ &\overset{(\star)}{\geqslant} \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle A(tv) - A(0), v \rangle \mathrm{d}t - \langle f - A(0), v \rangle \\ &\geqslant \frac{1}{2} \langle A\left(\frac{v}{2}\right) - A(0), v \rangle - \langle f - A(0), v \rangle \\ &= \left\langle A\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{2} v \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} A(0) - f, v \right\rangle \\ &\geqslant \gamma\left(\left\|\frac{v}{2}\right\|\right) \left\|\frac{v}{2}\right\| - \left\|\frac{1}{2}A(0) - f\right\|_* \|v\| \xrightarrow{\|v\|\to\infty} \infty,\end{aligned}$$

Es gilt $\langle Au^{(m')}, v^{(k)} \rangle \overset{(\star)}{=} \langle f, v^{(k)} \rangle \; \forall v^{(k)} \in V_k,\ k \leqslant m'$. Mit $m' \to \infty$ folgt $\langle a, v^{(k)} \rangle = \langle f, v^{(k)} \rangle \; \forall v^{(k)} \in \bigcup_{j=1}^\infty V_j \subset V$, welcher *dicht* liegt. Thus $\limsup_{m'\to\infty} \langle Au^{(m')}, u^{(m')} - u \rangle \overset{(\star)}{=} \limsup_{m'\to\infty} \left(\langle f, u^{(m')} \rangle - \langle Au^{(m')}, u \rangle \right) = 0$. Für $w \in V$ gilt aufgrund der *Pseudomontonie* von A

$$\begin{aligned}\langle Au, u-w \rangle &\leqslant \liminf_{m'\to\infty} \langle Au^{(m')}, u^{(m')}, w \rangle \\ &= \liminf_{m'\to\infty} \left(\langle f, u^{(m')} \rangle - \langle Au^{(m')}, w \rangle \right) = \langle f, u-w \rangle.\end{aligned}$$

Wählen wir $w := u \pm v$ für $v \in V$ erhalten wir $Au = f$.

Pseudomonotone, lokal beschränkte, koerzitive Operatoren sind surjektiv.
Wir suchen die Lösung $u^{(m)} \in V_m := \operatorname{span}((\varphi_k)_{k=1}^n)$ des endlich-dimensionalen Ersatzproblems $\langle Au^{(m)}, v^{(m)} \rangle = \langle f, v^{(m)} \rangle$ für alle $v^{(m)} \in V_m$. A ist demistetig und das Ersatzproblem ist für demistetige koerzitive Operatoren lösbar. Mit der Beschränktheit von $(u^{(m)})_m \subset V$ und $(Au^{(m)})_m \subset V^*$ existiert eine Teilfolge $(u^{(m')})$ sowie $u \in V$ und $a \in V^*$ mit $u^{(m')} \rightharpoonup u$ in V und $Au^{(m')} \rightharpoonup a$ in V^*.

Zu $f \in V^*$ finde ein $u \in V$, sodass $a(u,v) + b(u,u,v) = \langle f, v \rangle$,

wobei

$$a(v,w) := \nu \int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla w) \,\mathrm{d}x = \nu \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} w_i$$

$$b(u,v,w) := \langle (u \cdot \nabla) v, w \rangle_{L^2(\Omega)^d} = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega u_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j w_j.$$

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{C}_0^\infty : \nabla \cdot v = 0\}, \quad V := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}, \quad H := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein *beschränktes* Lipschitz-*Gebiet.*
$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0\}$,
$H = \{v \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot v = 0,\ \gamma_n v = 0\}$, wobei $\nabla v = 0$ für $v \in L^2$ bedeutet, dass $\int_\Omega v \cdot (\nabla \varphi) \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ gilt. Für glattes v ist $\gamma_n v := (v \cdot n)|_{\partial\Omega}$, wobei n den *äußeren Normalenvektor* bezeichnet. Damit ist $V \subset H_0^1(\Omega)^d$ ein *abgeschlossener Unterraum.*

Navier-Stokes-Gleichung

Eigenschaften von b

DGL II B

Navier-Stokes-Gleichung

Eigenschaften von A

DGL II B

Navier-Stokes-Gleichung

Beweis der Existenz einer Lösung I

DGL II B

Navier-Stokes-Gleichung

Beweis der Existenz einer Lösung II

DGL II B

Aussagen

Eigenschaften pseudomonotoner Operatoren

DGL II B

Lemma

Pseudomonotonie, lokale Beschränktheit $\Longrightarrow$ Demistetigkeit

DGL II B

Lemma

Auf reflexiven Räumen implizieren Monotonie und Radialstetigkeit die Demistetigkeit des Operators A

DGL II B

Prüfungsfrage

Lax-Milgram mit Galerkin-Scheman beweisen

DGL II B

Lemma

Pseudomonotone Operatoren besitzen die Eigenschaft (M)

DGL II B

Der Operator $a : V \times V \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch.
Nach dem *Satz von* LAX-MILGRAM besitzt das stationäre imkompressible NAVIER-STOKES-Problem ($b(\cdot,\cdot,\cdot)$ wird vernachlässigt) genau ein *„Geschwindigkeitslösung"*.
Der STOKES-Operator $A\colon V \to V^*$ mit $\langle Av, w \rangle := a(v,w)$ existiert und ist ebenfalls linear, beschränkt, stark positiv und symmetrisch.

$b\colon L^\alpha(\Omega)^d \times W^{1,\beta}(\Omega)^d \times L^\gamma(\Omega)^d \to \mathbb{R}$ mit $\alpha,\beta,\gamma > 1$ und $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ ist *multilinear* und *beschränkt*.
$b\colon V\times V\times V \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, *beschränkt* und *bezüglich des zweiten und dritten Arguments schiefsymmetrisch*, wobei

$$\|v\| := \|v\|_V := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}} = \left(\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} v_j\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

und $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$ für alle $u,v,w \in V$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}\|Bv_n - Bv\|_{V^*} &= \sup_{w\in V\setminus\{0\}} \frac{|\langle Bv_n - Bv, w\rangle|}{\|w\|} \\ &\leqslant (c_1+c_2)(\|v_n\|_{L^4} + \|v\|_{L^4})\|v_n - v\|_{L^4} \\ &= \tilde{c}(\|v_n\| + \|v\|)\|v_n - v\|_{L^4}\end{aligned}$$

für ein $\tilde{c} > 0$. Aus $V \overset{c}{\hookrightarrow} L^4$ folgt $\|v_n - v\|_{L^4} \to 0$. Letztlich ist $\|v_n\|$ beschränkt und somit folgt $\|Bv_n - Bv\|_{V^*} \to 0$.
2 $\langle Av + Bv, v\rangle = a(v,v) + \underbrace{b(v,v,v)}_{=0} = \nu\|v\|_V^2$.

Wir wenden Satz über verstärkt stetige Lösung an.
1 Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $v_n \rightharpoonup v$ in V. Wir zeigen $Bv_n = B(v_n,v_n) \to Bv = B(v,v)$ in V^*. Betrachte für $w \in V$

$$\begin{aligned}|\langle B(v_n,v_n) - B(v,v), w\rangle| &= |b(v_n,v_n,w) - b(v,v,w)| \\ &= |b(v_n, v_n - v, w) + b(v_n - v, v, w)| \\ &\leqslant |b(v_n, v_n - v, w)| + |b(v_n - v, v, w)| \\ &\leqslant (c_1+c_2)\|v_n\|_L^4 \|w\| \|v_n - v\|_{L^4}.\end{aligned}$$

für $c_1, c_2 > 0$.

Sei $u_n \to u$ in V. Da A lokal beschränkt ist, ist $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit existiert ein $b \in V^*$ und eine Teilfolge $(u_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$, sodass $Au_{n'} \rightharpoonup b$ gilt. Es folgt $\limsup_{n'\to\infty}\langle Au_{n'}, u_{n'}\rangle = \langle b, u\rangle$ und mit der Pseudomonotonie von A, welche die Eigenschaft (M) impliziert, $Au = b$. Teilfolgenprinzip anwenden.

Seien V separabel, reflexiv, $A\colon V \to V^*$.

1. Monotonie und Radialstetigkeit $\Longrightarrow$ Pseudomonotonie.
2. Verstärkte Stetigkeit impliziert Pseudomonotonie $u_n \rightharpoonup u$, dann $\liminf_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - w\rangle = \langle Au, u - w\rangle$.
3. Summen pseudomonotoner Op. sind pseudomonoton.

Lineare, beschränkte stark positive Operatoren $A\colon V \to V^*$ sind surjektiv.

Sei $(V_h)_h$ ein GALERKIN-Schema in V. Das diskrete Ersatzproblem ist: find $u_h \in V_h$ sodass $\langle Au_h - f, v_h\rangle = 0$ für alle $v_h \in V_h$ gilt. A-priori-Abschätzung: $\mu\|u_h\|^2 \leqslant \langle Au_h, u_h\rangle = \langle f, u_h\rangle \leqslant \|f\|_*\|u_h\|$. Da A linear und beschränkt ist, ist es schwach-schwach-stetig und somit folgt $Au_h \rightharpoonup Au$. Wende Teilfolgenprinzip an.

Sei $u_n \to u$. Aufgrund der Reflexivität genügt es, $\langle Au - Au_n, v\rangle \to 0$ für alle $v \in V$ zu zeigen. Da A monoton ist, ist er lokal beschränkt und somit existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ und $u_{n'} \to b \in V^*$. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle b, u\rangle \leftarrow \langle Au_{n'}, u_{n'}\rangle &\geqslant \langle Au_{n'}, u_{n'}\rangle - \langle Au_{n'} - Av, u_{n'} - v\rangle \\ &\geqslant \langle Av, u - v\rangle + \langle b, v\rangle\end{aligned}$$

Mit MINTY's Trick folgt $Au = b$.

$v_n \rightharpoonup v$ in V, $Av_n \rightharpoonup 0$ und $\limsup_{n\to\infty} Av_n, v_n\rangle \leqslant \langle b, v\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle b, v\rangle \geqslant \limsup_{n\to\infty} Av_n, v_n\rangle &= \limsup_{n\in\mathbb{N}}\langle Av_n, v_n - v\rangle + \langle Av_n, v\rangle \\ &= \limsup_{n\in\mathbb{N}}\langle Av_n, v_n - v\rangle + \langle b, v\rangle,\end{aligned}$$

d.h. $\langle Av_n, v_n - v\rangle \leqslant 0$. Aufgrund der Pseudomonotonie folgt

$$\begin{aligned}\langle Av, v - w\rangle &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\langle Av_n, v_n - w\rangle = \liminf_{n\to\infty}\langle Av_n, v_n\rangle - \langle b, w\rangle \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\langle Av_n, v_n\rangle - \langle b, w\rangle = \langle b, v - w\rangle.\end{aligned}$$

Mit MINTY's Trick folgt $Av = b$.